

3^ο ημε

22/2/21

Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα - Χαρακτ. πολυώνυμο

$A_{n \times n}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ χρησιμοποιώντας τις κανονικές βάσεις
Ποιοι πίνακες δίνουν αυτές γραμμικές απεικονίσεις? Οι τετραγωνικοί
και κυρίως ο μοναδιαίος

• $k=n$ $A_{n \times n}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

• Ταυτοτικός = $I_{n \times n}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$u \rightarrow u$

• Διαγώνιος: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ κανονικές βάσεις

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Όμοια για λ_3 όπως δεν είναι όλοι οι πίνακες διαγώνιοι!

Ερώτημα: Για κάθε πίνακα $A_{n \times n}$ μπορούμε να βρούμε
κάποιον διαγώνιο ώστε αυτοί να ορίσουν την ίδια απεικόνιση?

π.χ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Θέλω να τον}} \text{ώστε διαγώνιο}$$

και να ορίσουν
την ίδια γραμμική
απεικόνιση. Ο Α όπως θα αλλάξει. Πως θα γίνει αυτό?

Μήπως $\exists$ κατάλληλη βάση ώστε να
δίνει διαγώνιος $\Rightarrow$ να ορίσουν την ίδια
απ. Ο Α όπως θα αλλάξει. Πως θα γίνει αυτό?

Παράρ. 1: $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ γρ. απεικόνιση, ο πίνακας της T ορίζεται
ως προς κάποιες βάσεις (είναι πολλές άρα πολλοί και οι πίνακες)

Συνεχίζω το παραρ.



π.χ. $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τις κανονικές βάσεις:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - 5y \\ 2x - 3y \end{pmatrix}$$

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad T(x, y) = (4x - 5y, 2x - 3y)$$

$$T(\underbrace{1, 1}) = (4 - 5, 2 - 3) = (-1, -1) = \underbrace{-1}_{\text{circled}} (\underbrace{1, 1})$$

$$T(\underbrace{1, 2/5}) = (4 - 2, 2 - \frac{6}{5}) = (2, \frac{4}{5}) = \underbrace{2}_{\text{circled}} (\underbrace{1, \frac{2}{5}})$$

} = D

$\Rightarrow$ Ο πίνακας της T ως προς τις βάσεις $(1, 1), (1, 2/5)$ είναι ο διαγώνιος:

$$T_S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ερώτημα: Υπάρχει κατ'αλληλότητα βάση ώστε ένας τετραγωνικός πίνακας να δίνει την ίδια απεικόνιση με έναν διαγώνιο? Αν υπάρχει πως θα τη βρούμε?

Μέγεθος του προβλήματος: Δίνεται ένας πίνακας A της $n \times n$ μορφής. Ζητάμε βάση $(u_1, \dots, u_n)$ του $\mathbb{R}^n$ ώστε η αντίστοιχη φ. απεικόνιση να έχει διαγώνιο πίνακα ως προς αυτή τη βάση. Για τις $u_1, \dots, u_n$ πρέπει να ισχύει: $A \cdot u_i = \lambda_i \cdot u_i$ ώστε $\lambda_i \in \mathbb{R}$ και $u_i \neq 0$.

Ορισμός: Δίνεται ο πίνακας A της $n \times n$ μορφής. Αν υπάρχει αριθμός λ και μη-μηδενικό διάνυσμα u ώστε: $A \cdot u = \lambda u$, τότε το λ καλείται ιδιοτιμή του A και το u ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην λ .

Πώς θα βρεθούν αυτά? $A \cdot u = \lambda u \Rightarrow Au - \lambda u = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (A - \lambda I) \cdot u = \vec{0} \Rightarrow u \in \ker(A - \lambda I) \neq \{\vec{0}\} \Leftrightarrow A - \lambda I$ δεν
 αντιστρέφεται $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$ ($\neq$ ~~rank~~ $\text{rank}(A - \lambda I) < n$)

$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow$ Ζητάμε τις ρίζες του πολυωνύμου
 $\det(A - \lambda I)$ ↙ ~~αγνωστός~~
↘ ~~γνωστός~~
 γνωστός

Αυτό το πολυώνυμο καλείται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του
 A και συμβολίζεται $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, δηλ. οι ιδιοτιμές
 του A είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολ/μου

Π.χ.: $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{pmatrix} 4-5 & -\lambda \\ 2-3 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) =$
 $= \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & \lambda \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = -(4-\lambda)(3+\lambda) + 10 = (\lambda+3)(\lambda-4) + 10 =$
 $= \lambda^2 - \lambda + 10 - 12 = \lambda^2 - \lambda - 2$

$\lambda_1 = -1 \Rightarrow \chi_A(-1) = 0$ $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = 2$ είναι οι ιδιοτιμές
 $\lambda_2 = 2 \Rightarrow \chi_A(2) = 0$ του A

Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα: $(A - \lambda_1 \cdot I)u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Να βρούμε το u_1 :

$\left(\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4+1 & -5 \\ 2 & -3+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$

$u_1(x, x) = x(1, 1) \sim \underline{u_1 = (1, 1)}$: Ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_1 = -1$

$$(A - \lambda_2 I) u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4-2 & -5 \\ 2 & -3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 5y = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{5}x$$

$$u_2 = \left(x, \frac{2}{5}x \right) = x \left(1, \frac{2}{5} \right) \Rightarrow u_2 = \left(1, \frac{2}{5} \right)$$

Βρίσκουμε βάση η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα
ώστε η φρ. απεικόνιση που ορίζεται από τον πίνακα A,
να έχει πίνακα διαγωνίου:

$$T_S^S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Τι σχέση έχει ο A με τον T_S^S ?

$$A = T_K^K, T_S^S$$

$$A = T_K^K = T_S^K T_S^S T_K^S \quad T_S^K \text{ και } T_K^S \text{ είναι πίνακες} \\ \text{αλλαγής βάσης}$$

$$T_S^K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2/5 \end{pmatrix}, \quad T_K^S = (T_S^K)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2/5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2/3 & 5/3 \\ 5/3 & -5/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/3 & 5/3 \\ 5/3 & -5/3 \end{pmatrix}$$

$\parallel$
A

$\parallel$
P: πίνακας
αλλαγής βάσης

$\parallel$
I
Διαγωνίος

$\parallel$
P⁻¹: πίνακας
αλλαγής βάσης

$$A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1}$$

diag.

Ερώτηση 1) Για κάθε A υπάρχει πάντα διαγώνιος Λ και P αντιστρέψιμος ώστε $A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1} \Leftrightarrow P^{-1} \cdot A \cdot P = \Lambda$??? Όχι

2) Πότε υπάρχει και από τι εξαρτάται?

Μέθοδος για να βρούμε ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα:

① Βρίσκουμε το $\chi_A(\lambda)$ χαρακτηριστικό πολυώνυμο, $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ και υπολογίζουμε τις ρίζες του. Αυτές οι ρίζες είναι οι ιδιοτιμές του A

② Για κάθε ιδιοτιμή λ_i υπολογίζουμε τον $\ker(A - \lambda_i I)$. Η βάση του πυρήνα είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα λ_i

Πρόταση 1) Αντιστρέψιμοι πίνακες έχουν όλες τις ιδιοτιμές μη-μηδενικές

2) Αν ο A είναι ανώ ή κάτω τριγωνικός οι ιδιοτιμές του είναι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου

3) Αν λ είναι ιδιοτιμή του A με $\lambda \neq 0$, τότε ο λ^n είναι ιδιοτιμή του A^n για $n \in \mathbb{Z}$. Εδώ θεωρούμε ότι $A^0 = I$: ταυτοτικός πίνακας

4) Οι ιδιοτιμές ενός πίνακα δεν είναι πάντα πραγματικές

Απόδ. 1) Αν ο A έχει ιδιοτιμή $\lambda = 0$. Τότε $\det(A - 0I) = 0 \Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow$ ο A δεν αντιστρέφεται. Αποκλ.

$$2) A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda_1 - \lambda) \cdot (\lambda_2 - \lambda) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda)$$

3) $n \geq 2$ και $Au_1 = \lambda_1 u_1$ με $\lambda_1 \neq 0$ ($u_1 \neq 0$ & πάντα γιατί είναι ιδιοδιάνυσμα)

$$A \cdot A \cdot u_1 = A(\lambda_1 u_1) \Rightarrow A^2 \cdot u_1 = \lambda_1 \cdot A \cdot u_1 = \lambda_1 \cdot \lambda_1 \cdot u_1 = \lambda_1^2 \cdot u_1$$

$$\Rightarrow \lambda_1^2 : \text{ιδιοτιμή του } A^2. \text{ Με επαγωγή δείχνουμε ότι:}$$

$$A^n \cdot u_1 = \lambda_1^n \cdot u_1 \quad (A | A(\dots | A u_1) \dots) = A(A(\dots (A u_1) \dots)) =$$

$$= \lambda_1 A(A \cdot u_1) \dots) = \lambda_1 \lambda_1 \lambda_1 \dots \lambda_1 u_1 = \lambda_1^n \cdot u_1$$

$\exists A^{-1}$ όταν όλες οι ιδιοτιμές του είναι μη-μηδενικές

$$A \cdot u_1 = \lambda_1 u_1 \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot u_1 = A^{-1}(\lambda_1 u_1) \Rightarrow I \cdot u_1 = \lambda_1 \cdot A^{-1} u_1 =$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_1} u_1 = \frac{1}{\lambda_1} \lambda_1 \cdot A^{-1} u_1 \Rightarrow \frac{1}{\lambda_1} u_1 = A^{-1} u_1 \Rightarrow \lambda_1^{-1} \cdot u_1 = A^{-1} u_1$$

Με επαγωγή: $\lambda_1^{-n} \cdot u_1 = A^{-n} \cdot u_1$

4) Με παράδειγμα: Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda-1) \cdot (\lambda+1) + 2 = \lambda^2 - 1 + 2 = \lambda^2 + 1 \quad \& \text{ δεν έχει πραγματικές ρίζες (έχει μιγαδικές)}$$

Αρα δεν υπάρχουν πραγματικές ιδιοτιμές

Ορισμός: Ένας πίνακας A $n \times n$ διαγωνοποιείται, αν υπάρχει διαγώνιος Λ και αντιστρέψιμος P ώστε: $A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1}$

Θεώρημα: Ο Αλχη διαγωνοποιείται αν υπάρχουν η γραμμική ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Ο πίνακας P είναι αυτός που έχει σαν στήλες τα η γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα και Λ είναι ο διαγώνιος ο οποίος στην κωρία διαγώνιο έχει τις αντίστοιχες ιδιοτιμές

Απόδ.

Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι υπάρχουν η ιδιοτιμές λόχι απαραίτητα όλες διαφορετικές) και η γραμμική ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα:

$$A u_i = \lambda_i u_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Εφόσον τα u_i είναι η γρ. ανεξ. αποτελούν βάση. Ορίζουμε τον P να έχει σαν στήλες τα u_i : $P = (\underbrace{u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n}_{\text{στήλες}})$

Από αυτό είναι Γ.Α. το $\text{rank } P = n$, άρα ο P αντιστρέφεται

Ορίζουμε τον διαγώνιο $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ με τις αντίστοιχες ιδιοτιμές

$$\text{Θέλουμε: } A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1} \Leftrightarrow A \cdot P = P \cdot \Lambda$$

$$A \cdot P = A \left(\underbrace{u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n}_{\text{στήλες}} \right) = \begin{pmatrix} Au_1 & Au_2 & \dots & Au_n \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ 1^{\text{η στήλη}} & 2^{\text{η}} & & n^{\text{η στήλη}} \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda_1 u_1 \ \lambda_2 u_2 \ \dots \ \lambda_n u_n)$$

$$P \cdot \Lambda = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 u_1 \ \lambda_2 u_2 \ \dots \ \lambda_n u_n)$$

$$\Rightarrow A \cdot P = P \cdot \Lambda$$